十一、母體變異數的統計推論

Chapter 11 Inferences about population variances

學習目標

知識(認知)

- 可以清楚陳述母體變異數統計推論的意涵。
- 可以說明各種狀況下，母體變異數假設檢定的程序和標準。
- 可以說明各種狀況下，兩個母體變異數假設檢定的程序和標準。
- 評價各種情境下，母體變異數假設檢定的使用價值。

技能

- 能夠計算各種情境下的檢定統計值。
- 能夠利用檢定統計值與臨界值的比較，提出統計推論。
- 綜合所學，能夠於實務領域中，依據特定情境的需求進行假設檢定程序。

態度(情意)

- 意識到在日常生活或未來工作環境中，母體變異數假設檢定的重要性。
- 在各種情境下，依循假設檢定的程序，接受統計推論所傳達的意涵。

章節大綱

- 11.母體變異數統計推論
  - 11.1單一母體變異數統計推論
    - 11.1.1單一母體變異數之區間估計
    - 11.1.2單一母體變異數之假設檢定
  - 11.2兩個母體變異數統計推論

學習內容

- ■ 各種狀況下單獨一個母體變異數之統計推論程序
- ■ 各種狀況下兩個母體變異數之統計推論程序

學習建議

1. 【開始上課】下載PDF講義預習
2. 依據各單元順序，瀏覽數位教材內容
3. 針對數位教材中練習題目(來賓考試)演練
4. 同步上課學習
5. 相關學習主題討論
6. 學習評量

母體變異數推估的重要性

- 運用統計學的方法推估母體變異數σ^2，常被使用於推測商品或服務質與量的分散程度。
  - 商品或服務質與量若超過預設標準，消費者不會有抱怨；
  - 當商品或服務的質與量未達預設標準時，消費者就會抱怨，甚至產生抑制或改變消費的行為。
  - 咖啡容量多寡差異、雞排大小差異、雞腿大小差異、工作量大小差異、等候時間長短差異等，都可能造成管理上的困擾。
- 母體變異數的推估，在實務運用上就變成相當重要。

還有哪些差異最容易造成管理上的困惱？

提示舊經驗：激發學習動機

- 餐廳、旅行社或旅館經營管理
- 抽樣調查產品品質、服務品質、消費者滿意度
- 推論母體特徵的分散程度
- 信賴水準(推論成功機率)
- 母體變異數的統計推論
- 採取因應作為

11.1單一母體變異數統計推論

與8.5.3單元相同

11.1單一母體變異數統計推論

- 11.1.1單一母體變異數之區間估計
- 11.1.2單一母體變異數之假設檢定

樣本變異數推估母體變異數

- 從屬於常態分布的母體中，隨機抽取n個樣本。
  - 利用樣本變異數S^2進行母體變異數σ^2的統計推論時，可以利用$\frac{(n-1)\times S^2}{\sigma^2}$之抽樣分布屬於自由度$v = n - 1$的卡方分布協助推估。
    - $\chi^2 = \frac{(n-1)\times S^2}{\sigma^2}$，卡方值屬於無因次單位。
- 可利用卡方分布進行單一母體變異數的區間估計和假設檢定。

11.1.1單一母體變異數之區間估計

- 設定顯著水準α，信賴水準$1-\alpha$，其卡方值的信賴區間為
  - $\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}} \le \chi^2 \le \chi^2_{\frac{\alpha}{2}}$
- $\frac{(n-1)\times S^2}{\sigma^2}$之抽樣分布屬於自由度$v=n-1$的卡方分布
  - $\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}} \le \frac{(n-1)\times S^2}{\sigma^2} \le \chi^2_{\frac{\alpha}{2}} \rightarrow \frac{1}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}} \ge \frac{\sigma^2}{(n-1)\times S^2} \ge \frac{1}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}}$
  - $\frac{(n-1)\times S^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}} \ge \sigma^2 \ge \frac{(n-1)\times S^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}} \rightarrow \frac{(n-1)\times S^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}} \le \sigma^2 \le \frac{(n-1)\times S^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}}$

範例

範例11.1 假設台西餐廳每天消費者人數屬於常態分布，欲知悉該餐廳每天消費者人數分布的變異數在信賴水準0.95之信賴區間？今隨機抽取15天計算每天消費者人數分布的變異數S^2 = 1.0021。

題解：樣本數量n = 15，自由度$v = n - 1 = 15 - 1 = 14$，顯著水準$\alpha = 0.05$，樣本變異數S^2 = 1.0021。$\chi^2_{\frac{\alpha}{2},n-1} = \chi^2_{\frac{0.05}{2},15-1} = 26.1189$；$\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2},n-1} = \chi^2_{1-\frac{0.05}{2},15-1} = 5.6287$ (CHISQ.INV.RT)。

$$\frac{(n-1)\times S^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}} \le \sigma^2 \le \frac{(n-1)\times S^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}} \rightarrow \frac{(15-1)\times 1.0021}{26.1189} \le \sigma^2 \le \frac{(15-1)\times 1.0021}{5.6287} \rightarrow 0.5371 \le \sigma^2 \le 2.4925$$

答案：餐廳每天消費者人數分布的變異數在信賴水準0.95的信賴區間為0.5371~2.4925人^2

輕鬆練習一下

此投影片播放後3分鐘內，沒有進入該練習卷者，老師即關閉沒有進入者的練習卷(本練習10 分鐘內完成)

上課練習112ch11_1

11.1.2單一母體變異數之假設檢定

- 從常態分布母體中隨機抽取n個樣本，利用卡方分布進行母體變異數σ^2的假設檢定。
  - 其中σ_0^2為假設檢定的預設值。

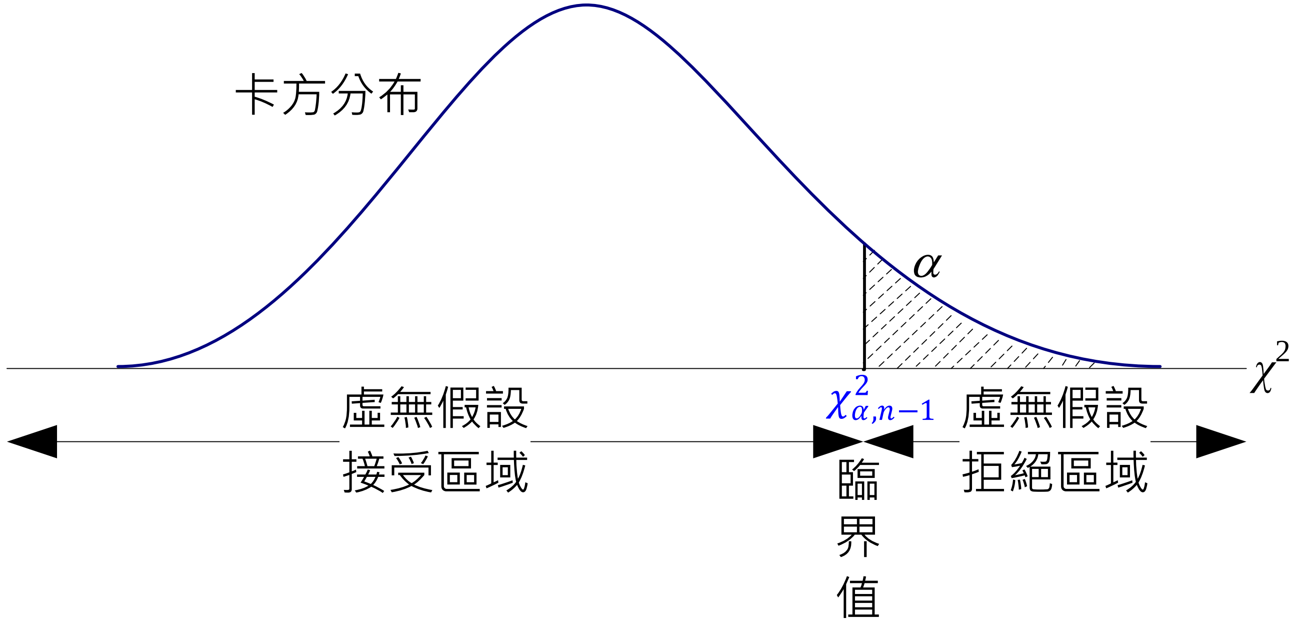
$$\text{檢定統計值}\chi^2 = \frac{(n-1)\times S^2}{\sigma_0^2}$$

- 在檢定階段，將檢定統計值—卡方值χ^2與顯著水準α下自由度$v = n - 1$的卡方值$\chi^2_{\alpha,n-1}$、$\chi^2_{1-\alpha,n-1}$、$\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2},n-1}$或$\chi^2_{\frac{\alpha}{2},n-1}$值(臨界值)進行比較。

右尾檢定 左尾檢定 雙尾檢定

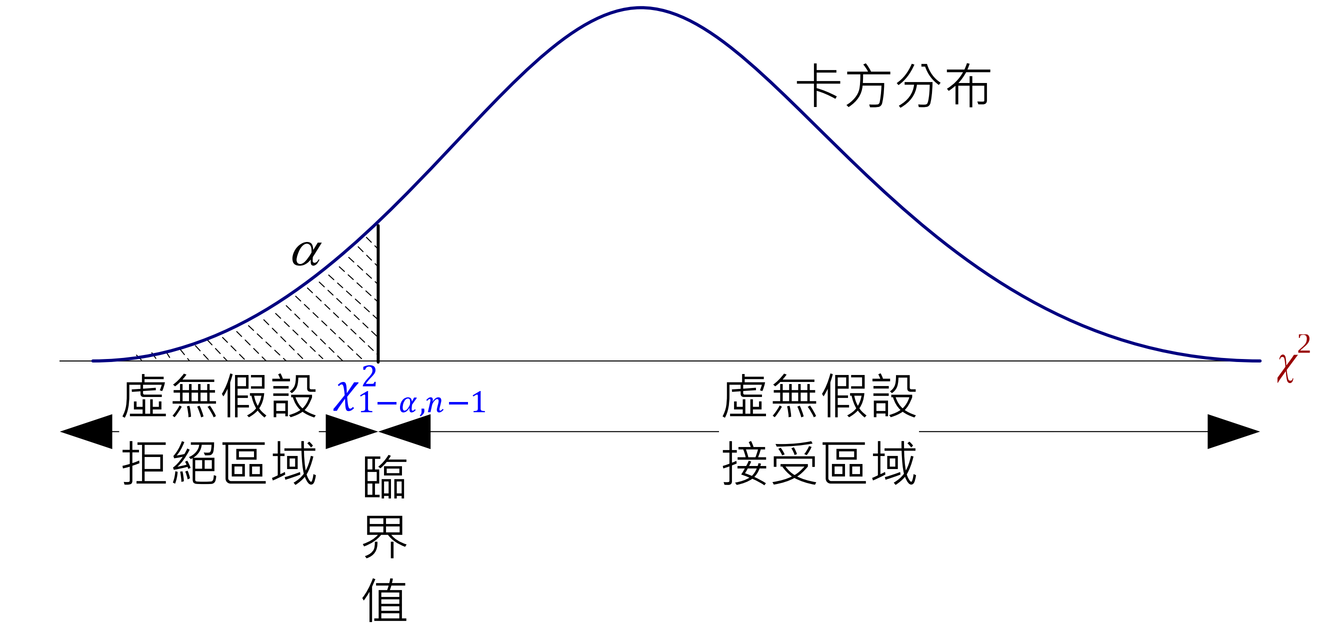
右尾檢定

- 虛無假設H_0: $\sigma^2 \le \sigma_0^2$；對立假設H_1: $\sigma^2 > \sigma_0^2$
  - 檢定統計值$\chi^2 \le$ 臨界值$\chi^2_{\alpha,n-1}$，接受虛無假設H_0: $\sigma^2 \le \sigma_0^2$。
  - 檢定統計值$\chi^2 >$ 臨界值$\chi^2_{\alpha,n-1}$，接受對立假設H_1: $\sigma^2 > \sigma_0^2$。



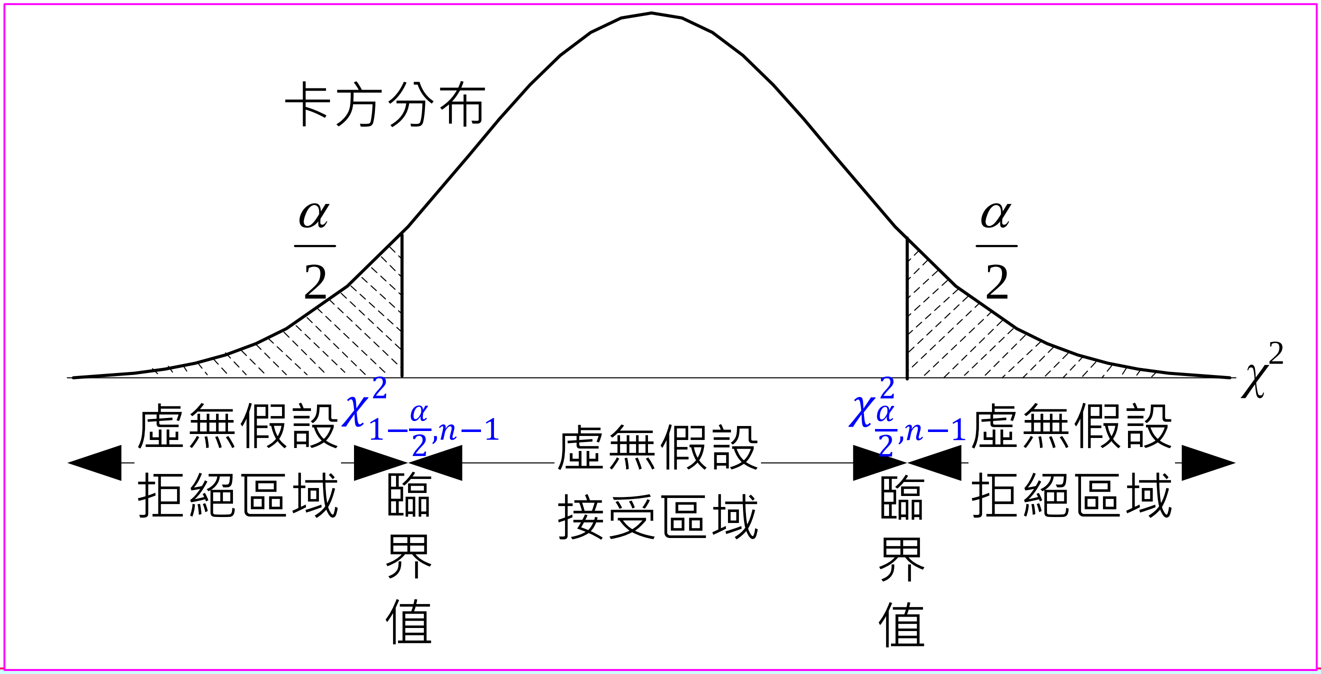
左尾檢定

- 虛無假設H_0: $\sigma^2 \geq \sigma_0^2$；對立假設H_1: $\sigma^2 < \sigma_0^2$
  - 檢定統計值$\chi^2 \geq$ 臨界值$\chi^2_{1-\alpha,n-1}$，接受虛無假設H_0: $\sigma^2 \geq \sigma_0^2$。
  - 檢定統計值$\chi^2 <$ 臨界值$\chi^2_{1-\alpha,n-1}$，接受對立假設H_1: $\sigma^2 < \sigma_0^2$。



雙尾檢定

- 虛無假設H_0: $\sigma^2 = \sigma_0^2$；對立假設H_1: $\sigma^2 \neq \sigma_0^2$。
  - 左側臨界值$\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2},n-1}$ ≤ 檢定統計值χ^2 ≤ 右側臨界值$\chi^2_{\frac{\alpha}{2},n-1}$，接受虛無假設$H_0$: $\sigma^2 = \sigma_0^2$。
  - 檢定統計值χ^2 < 左側臨界值$\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2},n-1}$或檢定統計值$\chi^2$ > 右側臨界值$\chi^2_{\frac{\alpha}{2},n-1}$，接受對立假設$H_1$: $\sigma^2 \neq \sigma_0^2$。



範例(1/2)

範例11.2 若欲知悉四湖餐廳販售清蒸鱈魚，依據標準食譜設計每盤清蒸鱈魚中，需有鱈魚原料AP重600克，容許標準差$\sigma = 5$克。假設供應商提供的鱈魚原料重量屬於常態分布，今隨機抽取欲製作清蒸鱈魚原料19個樣本，標準差為$S = 6$克，在信賴水準為0.95的情況下，該批清蒸鱈魚的原料是否符合重量分散程度的標準？

題解：樣本數量$n = 19$，自由度$v = n - 1 = 19 - 1 = 18$，顯著水準$\alpha = 0.05$，母體變異數預設值$\sigma_0^2 = 25$克^2，樣本變異數$S^2 = 36$克^2，臨界值—卡方值$\chi^2_{\alpha,n-1} = \chi^2_{0.05,19-1} = \chi^2_{0.05,18} = 28.8693$【CHISQ.INV.RT】。

A. 設定顯著水準$\alpha = 0.05$。本範例屬於右尾檢定

B. 虛無假設H_0: $\sigma^2 \leq 25$

C. 對立假設H_1: $\sigma^2 > 25$

範例(2/2)

範例11.2 若欲知悉四湖餐廳販售清蒸鱈魚，依據標準食譜設計每盤清蒸鱈魚中，需有鱈魚原料AP重600克，容許標準差$\sigma = 5$克。假設供應商提供的鱈魚原料重量屬於常態分布，今隨機抽取欲製作清蒸鱈魚原料19個樣本，標準差為$S = 6$克，在信賴水準為0.95的情況下，該批清蒸鱈魚的原料是否符合重量分散程度的標準？

D. 計算檢定統計值—卡方值

$$\chi^2 = \frac{(n-1)\times S^2}{\sigma_0^2} = \frac{(19-1)\times 36}{25} = 25.92$$

E. 檢定統計值$\chi^2 = 25.92 < $ 臨界值$\chi^2_{\alpha,n-1} = 28.8693$，接受虛無假設$H_0: \sigma^2 \leq 25$。

輕鬆練習一下

此投影片播放後3分鐘內，沒有進入該練習卷者，老師即關閉沒有進入者的練習卷(本練習10 分鐘內完成)

上課練習112ch11_2

兩獨立母體平均值之差的區間估計

樣本數量多時

母體變異數	兩母體	信賴區間【點估計值±誤差範圍(臨界值×標準誤)】
已知	變異數不相等	$\lvert\bar{x}_1-\bar{x}_2\rvert \pm z_{\frac{\alpha}{2}} \times \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}$
已知	變異數相等	$\lvert\bar{x}_1-\bar{x}_2\rvert \pm z_{\frac{\alpha}{2}} \times \sqrt{\sigma^2 \times \left(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}\right)}$
未知	變異數不相等	$\lvert\bar{x}_1-\bar{x}_2\rvert \pm t_{\frac{\alpha}{2},v=n_1+n_2-2} \times \sqrt{\frac{S_1^2}{n_1}+\frac{S_2^2}{n_2}}$
未知	變異數相等	$\lvert\bar{x}_1-\bar{x}_2\rvert \pm t_{\frac{\alpha}{2},v=n_1+n_2-2} \times \sqrt{\frac{(n_1-1)\times S_1^2+(n_2-1)\times S_2^2}{n_1+n_2-2}} \times \sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}$

線上討論：實務上哪一種狀況最常碰到？

兩母體變異數統計推論

- F分布除了運用於變異數分布(第13章)的假設檢定程序以外，還可以使用於對兩個母體的變異數相等性檢定。
  - 在進行其他檢定前，會先做兩個母體變異數相等性檢定以決定下一步該用何種檢定方法。
    - 兩個母體平均值之差的統計推論(第10章)，信賴區間和假設檢定都會依據兩母體變異數是否相等，其運算方式有差異。
    - 兩個母體變異數統計推論是很多統計分析的基礎。

11.2兩母體變異數統計推論

- 進行兩個不同母體變異數比較時，從兩個不同的母體(1和2)分別隨機抽取n_1和n_2個樣本。
  - 進行兩個母體變異數σ_1^2和σ_2^2統計推論時，以樣本變異數S_1^2和S_2^2為依據。
    - 兩母體的隨機樣本屬於獨立樣本。
  - 兩個母體皆屬於常態分布，若要驗證變異數是否相等$\sigma_1^2 = \sigma_2^2$時(虛無假設H_0: $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$)，利用兩個樣本變異數的比率$\frac{S_1^2}{S_2^2}$之抽樣分布，屬於分子自由度$v_1 = n_1 - 1$，分母自由度$v_2 = n_2 - 1$的F分布。
- $F = \frac{S_1^2}{S_2^2}$，F值屬於無因次單位。
    - F分布屬於不對稱分布(向右偏斜)，F值不可能為負值(–)。

F－分布

- F_{α,v_1,v_2}符號代表該特定F值以上(右尾)機率等於α。$P(F > F_\alpha) = \alpha$。
  - 右尾F值表中，提供右尾機率為α的F值，若需要左尾機率$1-\alpha$的F值，可利用下列倒數方式獲得。
  - $F_{\alpha,v_1,v_2} = \dfrac{1}{F_{1-\alpha,v_2,v_1}}$
  - 統計推論過程，樣本變異數S^2較大者視為母體1(分子)；樣本變異數S^2較小者視為母體2(分母)。
- F數值皆會大於1($F > 1$)。

要特別記住喔！

- 右尾檢定
- 雙尾檢定

右尾檢定

- 強制將樣本變異數較大者視為母體1(分子)，因此進行單尾檢定時皆屬於右尾檢定。
  - 虛無假設H_0: $\sigma_1^2 \le \sigma_2^2$
  - 對立假設H_1: $\sigma_1^2 > \sigma_2^2$
- 檢定統計值$F = \frac{S_1^2}{S_2^2}$
  - 檢定統計值$F \le$ 臨界值F_{α,v_1,v_2}，接受虛無假設 H_0: $\sigma_1^2 \le \sigma_2^2$。
  - 檢定統計值$F >$ 臨界值F_{α,v_1,v_2}，接受對立假設H_1: $\sigma_1^2 > \sigma_2^2$。

雙尾檢定

- 虛無假設H_0: $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$
- 對立假設H_1: $\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$
- 檢定統計值$F = \frac{S_1^2}{S_2^2}$
  - 檢定統計值$F \leq$ 臨界值$F_{\frac{\alpha}{2},v_1,v_2}$，接受虛無假設$H_0$: $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$。
  - 檢定統計值$F >$ 臨界值$F_{\frac{\alpha}{2},v_1,v_2}$，接受對立假設$H_1$: $\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$。

F值Excel函數

利用Excel 2010軟體中公式 → 函數程式庫中其他函數 → 統計(S) → 選取**FINV**

probability
- 右尾累計機率。

deg_freedom1
- 分子自由度

deg_freedom2
- 分母自由度

利用Excel 2010軟體中公式 → 函數程式庫中其他函數 → 統計(S) → 選取**F.INV**

probability
- 左尾累計機率。

deg_freedom1
- 分子自由度

deg_freedom2
- 分母自由度

F值查表說明範例

分子自由度為學號最後兩位數值，分母自由度為學號最後3-4位數值，上課討論區搶答F值

範例11.3 請使用附錄F分布臨界值表，找出下列各種條件下的F值：

a.$F_{0.05}$當$v_1 = 8$和$v_2 = 7$　　b.$F_{0.01}$當$v_1 = 18$和 $v_2 = 17$

c.$F_{0.025}$ 當$v_1 = 11$和$v_2 = 15$　　d.$F_{0.10}$ 當$v_1 = 20$和$v_2 = 7$

$\alpha = 0.05$

v_2 \ v_1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	161.4476	199.5000	215.7073	224.5832	230.1619	233.9860	236.7684	238.8827	240.5433	241.8817
2	18.5128	19.0000	19.1643	19.2468	19.2964	19.3295	19.3532	19.3710	19.3848	19.3959
3	10.1280	9.5521	9.2766	9.1172	9.0135	8.9406	8.8867	8.8452	8.8123	8.7855
4	7.7086	6.9443	6.5914	6.3882	6.2561	6.1631	6.0942	6.0410	5.9988	5.9644
5	6.6079	5.7861	5.4095	5.1922	5.0503	4.9503	4.8759	4.8183	4.7725	4.7351
6	5.9874	5.1433	4.7571	4.5337	4.3874	4.2839	4.2067	4.1468	4.0990	4.0600
7	5.5914	4.7374	4.3468	4.1203	3.9715	3.8660	3.7870	$\boxed{3.7257}$	3.6767	3.6365
8	5.3177	4.4590	4.0662	3.8379	3.6875	3.5806	3.5005	3.4381	3.3881	3.3472

答案：(a)3.7257；(b)　　　；(c)　　　；(d)

兩個變異數假設檢定範例(1/2)

範例11.4 若欲知悉餐廳販售清蒸鱈魚，男女性消費者對菜色滿意度的變異數是否顯著性差異。假設男女性分別對菜色滿意度分布屬於常態分布，今隨機抽取餐廳內有點用清蒸鱈魚的消費者，男性35名和女性32名，其標準差分別為1.32和1.20，在信賴水準為0.95的情況下，男女性消費者對於清蒸鱈魚滿意度變異數是否相等？

題解：男性樣本數$n_1 = 35$，男性樣本標準差$S_1 = 1.32$，男性樣本變異數$S_1^2 = 1.7424$，女性樣本數$n_2 = 32$，女性樣本標準差$S_2 = 1.20$，女性樣本變異數$S_2^2 = 1.4400$。希望檢定男女兩性的變異數是否相等，故本範例屬於雙尾檢定。

A. 設定顯著水準$\alpha = 0.05$，臨界值$F_{\frac{\alpha}{2},v_1,v_2} = F_{0.025,34,31} = 2.0265$ (F.INV)

B. 虛無假設H_0: $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$

C. 對立假設H_1: $\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$

兩個變異數假設檢定範例(2/2)

範例11.4 若欲知悉餐廳販售清蒸鱈魚，男女性消費者對菜色滿意度的變異數是否顯著性差異。假設男女性分別對菜色滿意度分布屬於常態分布，今隨機抽取餐廳內有點用清蒸鱈魚的消費者，男性35名和女性32名，其標準差分別為1.32和1.20，在信賴水準為0.95的情況下，男女性消費者對於清蒸鱈魚滿意度變異數是否相等？

D. 計算檢定統計值F值

$$\text{檢定統計值}F=\frac{S_1^2}{S_2^2}=\frac{1.7424}{1.4400}=1.21$$

E. 檢定統計值$F = 1.21 \leq$ 臨界值$F_{\frac{\alpha}{2},v_1,v_2} = 2.0265$，接受虛無假設$H_0\colon \sigma_1^2=\sigma_2^2$。

輕鬆練習一下

此投影片播放後3分鐘內，沒有進入該練習卷者，老師即關閉沒有進入者的練習卷(本練習10 分鐘內完成)

上課練習112ch11_3

先使用『來賓練習』熟習課程內涵

正式平常考每一題留下運算檔案

匡列足夠時間，一次登入，一口氣完成，一次繳交

關閉時間：D+2日2359

平常考112ch11

您辛苦了

第十一章課程結束